



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



# Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 1c. Oszacowanie błędu w elemencie skończonym

10.2024

# Przypomnienie (zależności omawiane na wykładach MES I)

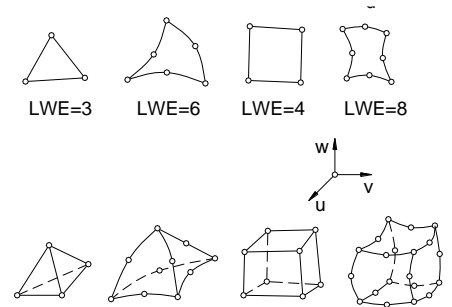
Podstawowe zależności pomiędzy przemieszczeniami, odkształceniami, naprężeniami i energią odkształceń w elementach skończonych

Pole przemieszczeń nad elementem jest interpolowane z przemieszczeń węzłowych:

$$\{u\} = [N(x, y, z)] \{q\}_e$$

Na przykład dla najprostszego elementu trójkątnego z 3 węzłami i 6 stopniami swobody mamy:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & N_3(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$



Przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia w obrębie każdego elementu są definiowane jako funkcje przemieszczeń węzłowych

$$\{u\} = [N] \{q\}_e,$$

$$\{\varepsilon\} = [R] \{u\} = [R][N] \{q\}_e = [B] \{q\}_e,$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D][B] \{q\}_e.$$

Energia odkształcenia elementu  $\Omega_e$  wynosi:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\varepsilon] \{\sigma\} d\Omega_e \Rightarrow U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [q]_e [B]^T [D] [B] \{q\}_e d\Omega_e$$

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e$$

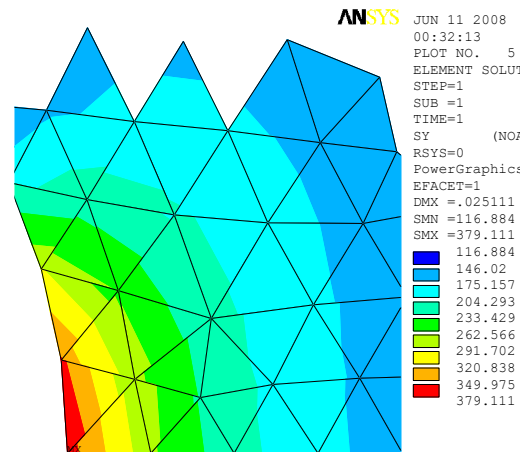
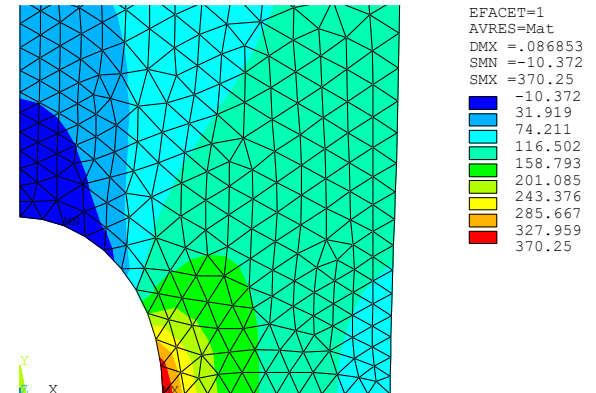
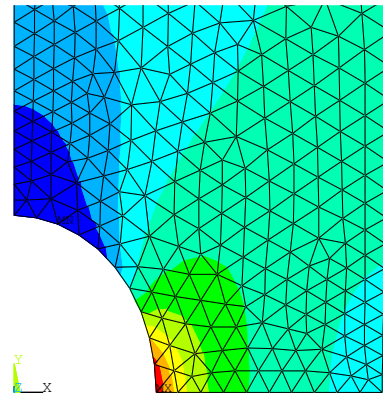
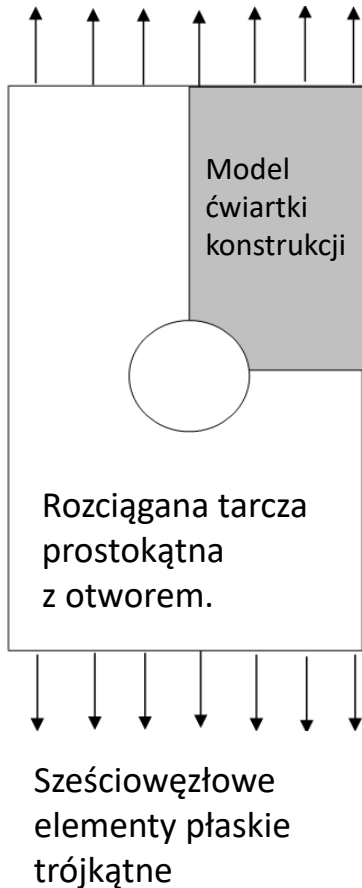
$$[k]_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega_e$$

jest macierzą sztywności elementu (symetryczną, osobiwą, dodatnio określoną) 2

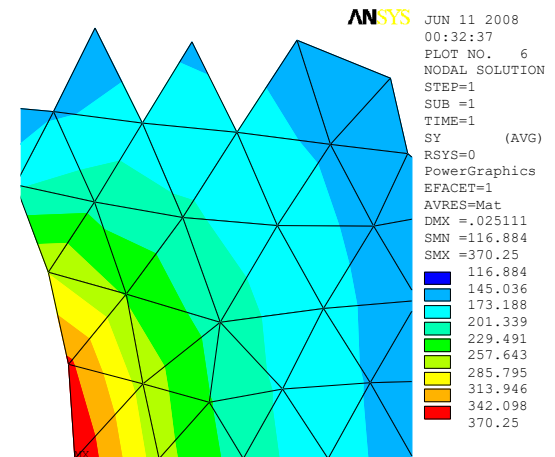
# Techniki aproksymacji błędów a posteriori

Rozwiązanie elementowe i węzłowe w postprocesorach programów MES (PLESOL, PLNSOL w ANSYS). Rozwiązanie MES zapewnia ciągłe pole przemieszczeń (od elementu do elementu) i nieciągłe pole naprężeń. Aby uzyskać gładki rozkład naprężeń, wykonuje się uśrednianie naprężeń w węzłach (naprężenia węzłowe).

## Składowa naprężenia $\sigma_y$

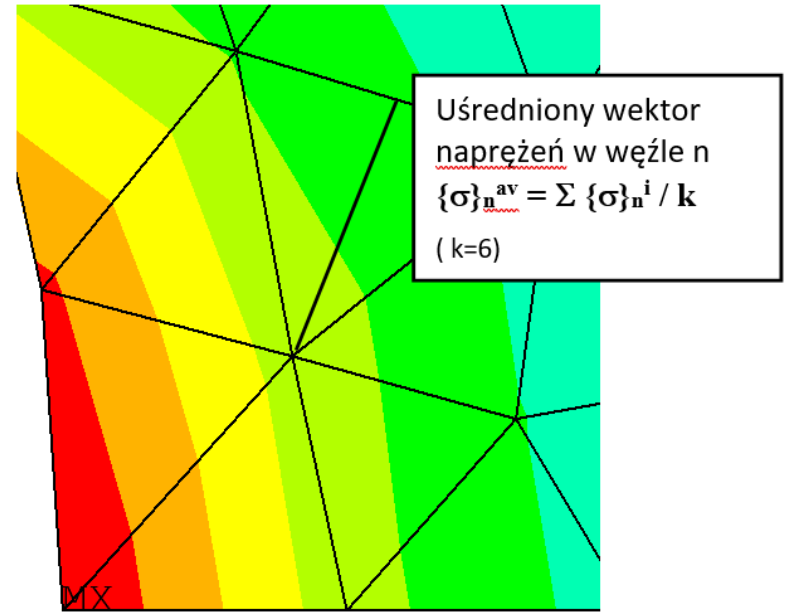
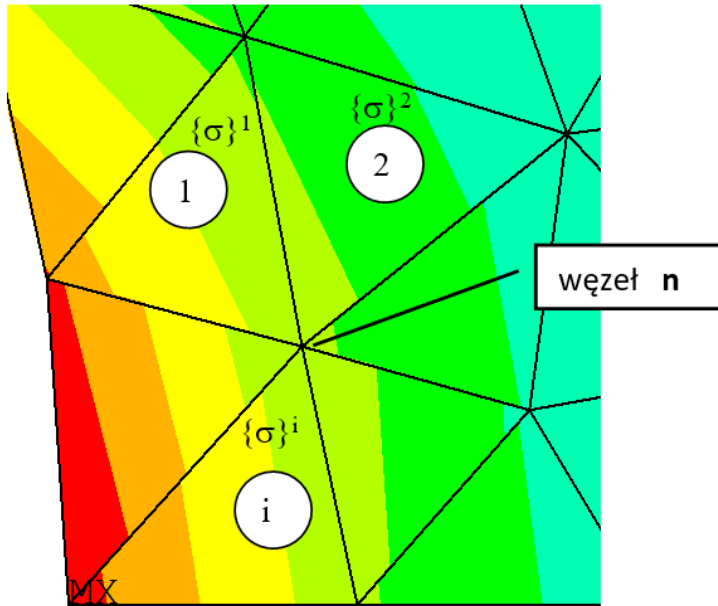


Nieciągłe „rozwiązanie elementowe”



uśrednione ciągłe „rozwiązanie węzłowe”

# Techniki aproksymacji błędów a posteriori



wektor naprężeń w węźle **n** elementu **i**:

$$\{\sigma\}_n^i = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_n \quad \{\sigma\}_n^1 \neq \{\sigma\}_n^2 \neq \{\sigma\}_n^3 \neq \dots$$

uśredniony wektor naprężeń w węźle **n**:

$$\{\sigma\}_n^{av} = \frac{\sum_{i=1}^k \{\sigma\}_n^i}{k}$$

Wektor błędu naprężenia w węźle  $n$  elementu  $i$ -tego  $\{\Delta\sigma\}_n^i = \{\sigma\}_n^i - \{\sigma\}_n^{av}$

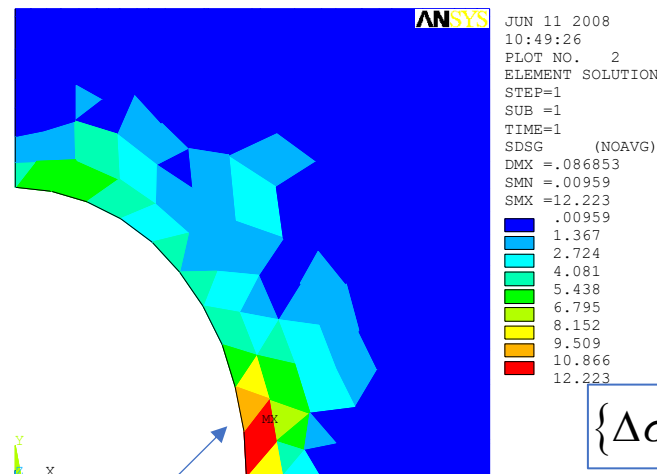
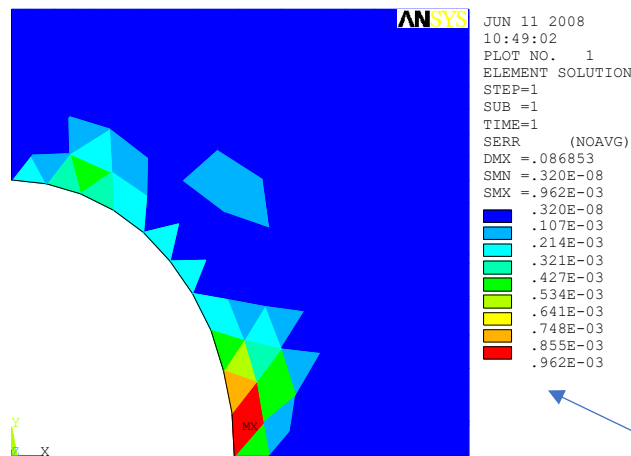
Wektor błędu naprężenia  $\{\Delta\sigma\}^i$  w elemencie „ $i$ ” można określić za pomocą przybliżenia standardowego, wykorzystując wektory błędów naprężeń w węzłach elementu  $i$ -tego  $\{\Delta\sigma\}_n^i$

Energia odkształcenia elementu  $i$ :  $U_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} [\sigma]^i \{\varepsilon\}^i d\Omega_i \Rightarrow U_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} [\sigma]^i [D]^{-1} \{\sigma\}^i d\Omega_i$

$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\}$

Następnie dla każdego elementu można oszacować tzw. błąd energetyczny:

$$e_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} [\Delta\sigma]^i [D]^{-1} \{\Delta\sigma\}^i d\Omega_i \quad (SERR)$$



**SDSG -**  
 $\Delta\sigma_i =$  maximum absolute value of any component of

$$\{\Delta\sigma\}_n^i = \{\sigma\}_n^i - \{\sigma\}_n^{av}$$

for all nodes connected to the element 5

Siatka początkowa. Rozkład błędów SERR i SDSG

Błąd energetyczny w modelu

$$e = \sum_{i=1}^{l.el.} e_i$$

Błąd energetyczny można znormalizować względem energii odkształcenia  
(*błąd procentowy normy energetycznej*)

$$SEPC = 100 \left( \frac{e}{U + e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

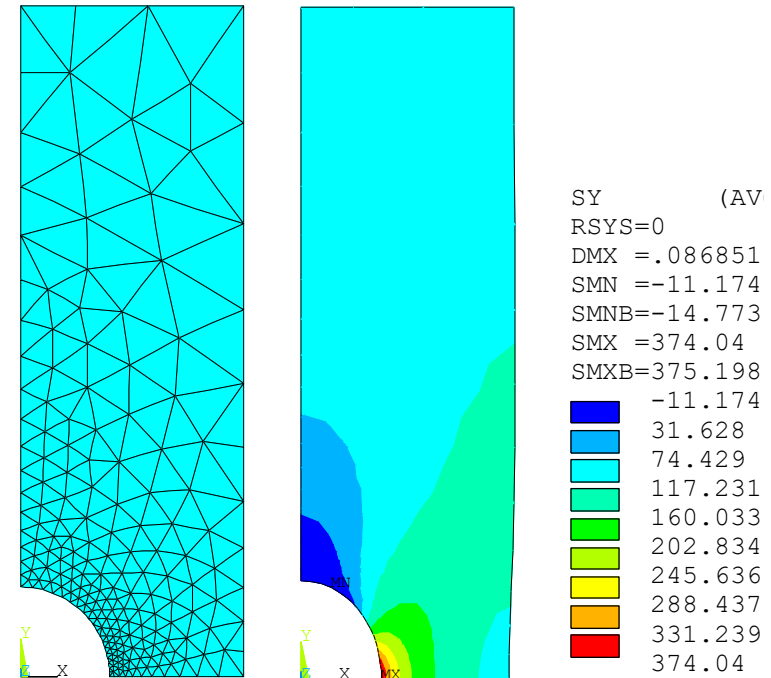
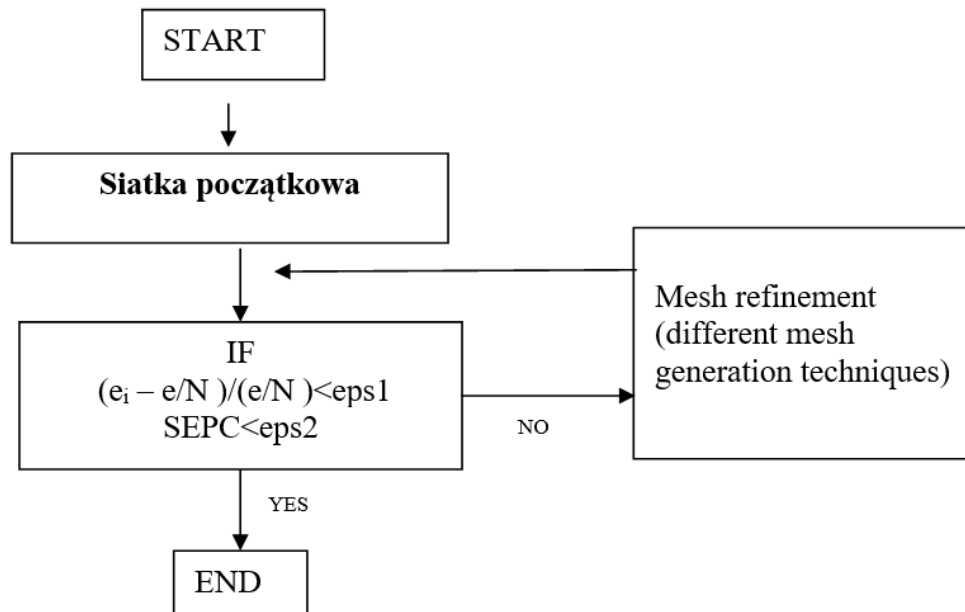
U – całkowita energia odkształcenia w całym modelu

Wartości  $e_i$  można wykorzystać do adaptacyjnego udoskonalenia siatki. Wykazano, że jeśli  $e_i$  jest równe dla wszystkich elementów, to model wykorzystujący daną liczbę elementów jest najefektywniejszy.

Koncepcję tę określa się także mianem „równoważenia błędów” ( $e_i = \text{const}$ ,  $SEPC < S_0$ ).

## Adaptacyjne techniki tworzenia siatki

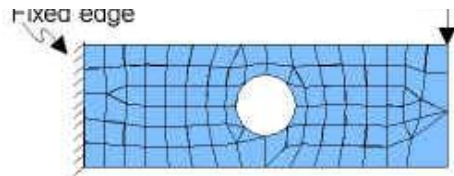
- Automatyczne udoskonalanie siatek FE do momentu uzyskania zbieżnych wyników
- Odpowiedzialność użytkownika ograniczona do wygenerowania dobrej siatki początkowej



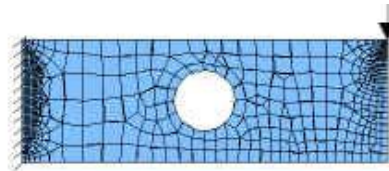
Ostateczna siatka MES i wyniki - rozkład  $S_y$   
(błąd procentowy w normie energetycznej  
 $SEPC=0,811\%$ , równomierny rozkład błędów  $e_i = const$ )

## Selektywne tworzenie siatki adaptacyjnej

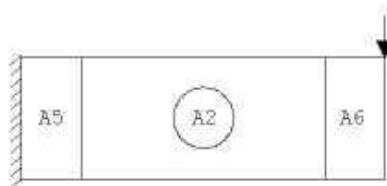
Jeśli błąd dyskretyzacji siatki (*mierzony jako procent*) jest stosunkowo nieistotny w niektórych obszarach modelu, procedurę można przyspieszyć, wyłączając takie obszary z adaptacyjnych operacji siatki. Również - bliskie osobliwości spowodowane przez obciążenia skupione i na granicach między różnymi materiałami.



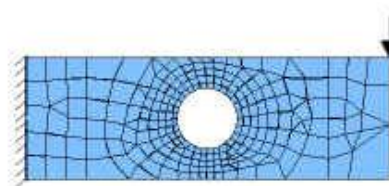
(a) Initial Mesh



(b) Mesh obtained with all areas selected— note excessive mesh density near concentrated load and constraints.



(c) Unselect areas 5 and 6 prior to initiating ADAPT.



(d) Mesh obtained with areas 5 and 6 unselected.

Selective adaptive  
meshing in ANSYS

Rodzaje udoskonaleń w siatkach adaptacyjnych:

**h-refinement:** redukcja rozmiaru elementu („h” odnosi się do typowego rozmiaru elementów)

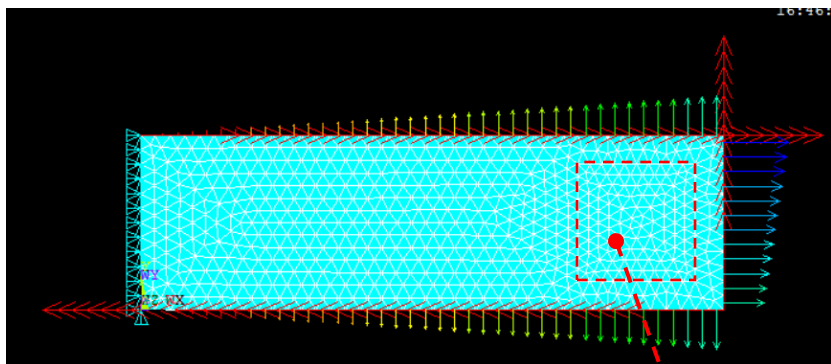
**p-refinement:** zwiększenie rzędu wielomianów w elemencie (*funkcje kształtu z liniowych na kwadratowe itd.*)

**r-refinement:** ponowne rozmieszczenie węzłów w siatce

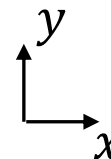
**hp-refinement:** połączenie procedury h- i p-



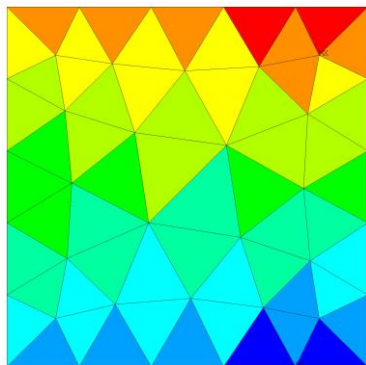
# Przykład: ścinana tarcza prostokątna z nałożonym ciśnieniem z gradientem



Napężenia normalne w kierunku x (SX) (MPa)

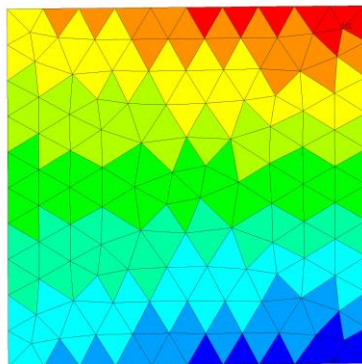


CST, 4mm  
(free mesh)



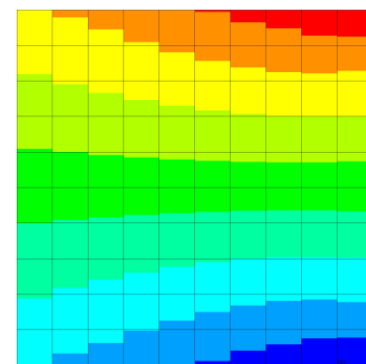
SMN =29.9391  
SMX =50.0735

CST, 2mm  
(free mesh)

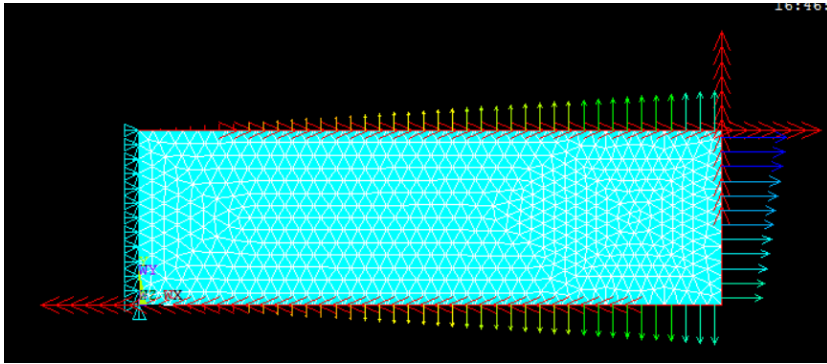


SMN =31.3547  
SMX =48.657

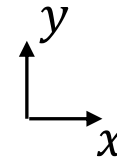
QUAD-4node, 2mm  
(mapped mesh)



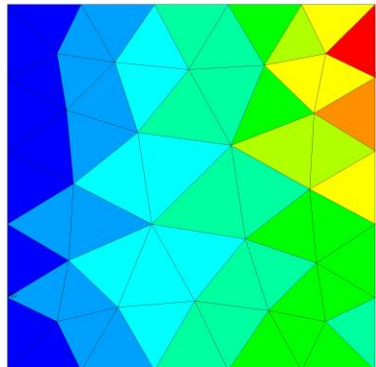
SMN =31.2497  
SMX =48.819



Napężenia normalne w kierunku y (SY) (MPa)

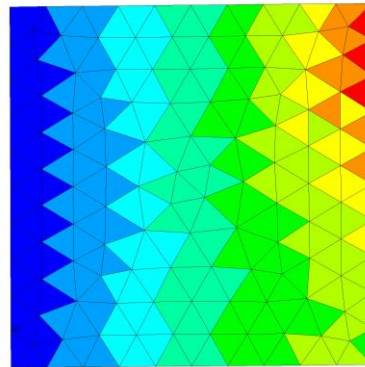


CST, 4mm



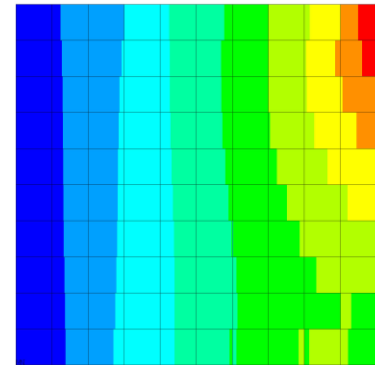
SMN =22.4161  
SMX =31.2216

CST, 2mm

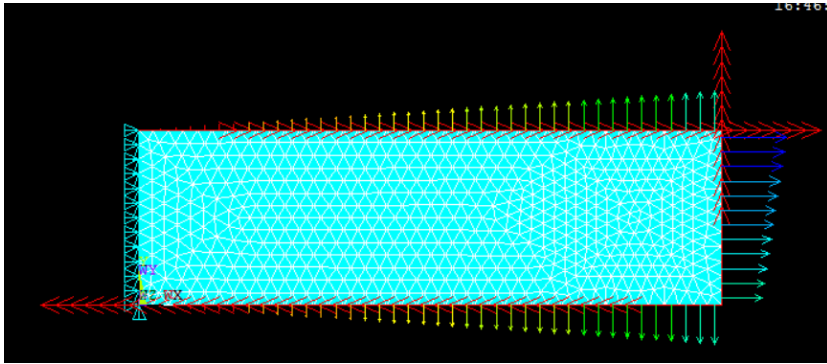


SMN =22.4077  
SMX =30.4297

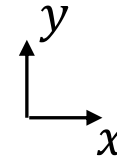
QUAD-4node, 2mm



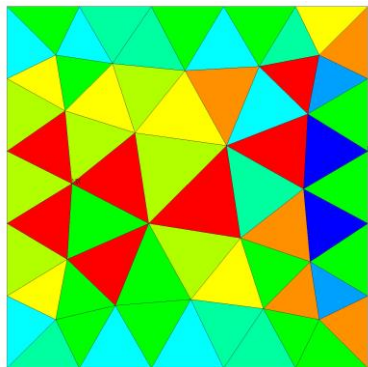
SMN =22.3724  
SMX =30.5656



Napężenia tnące (SXY) (MPa)

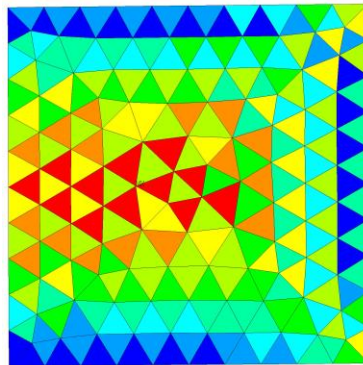


CST, 4mm



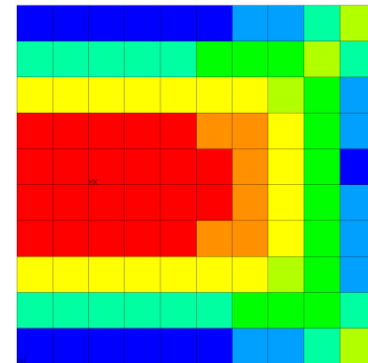
SMN =20.9712  
SMX =22.9216

CST, 2mm

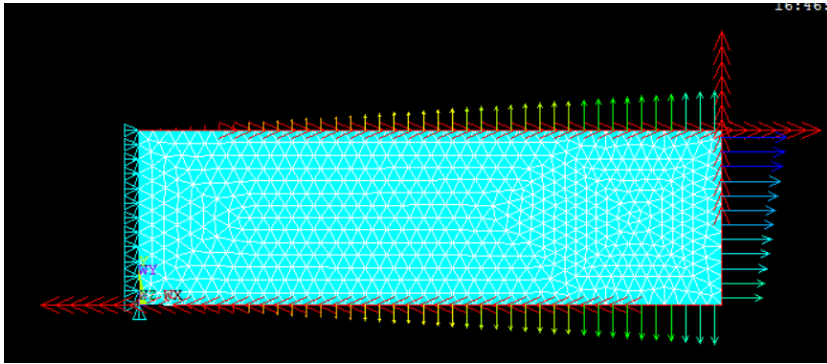


SMN =21.4276  
SMX =22.7416

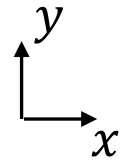
QUAD-4node, 2mm



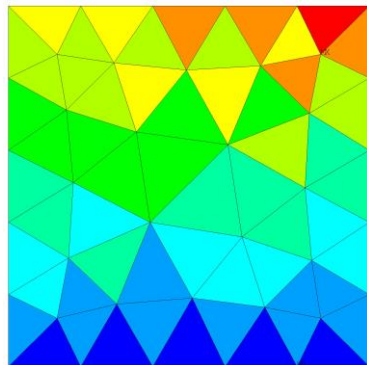
SMN =21.553  
SMX =22.4885



Naprężenia zredukowane - Von Mises stress (SEQV) (MPa)

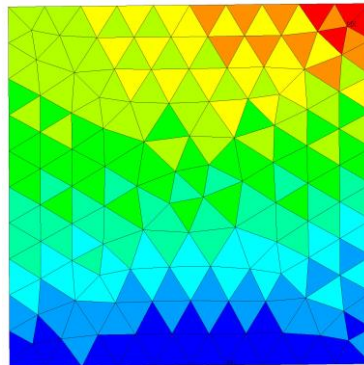


CST, 4mm



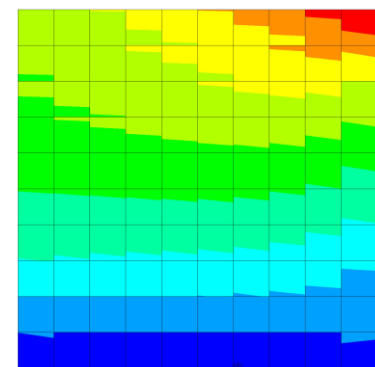
SMN =47.474  
SMX =58.2418

CST, 2mm



SMN =47.9007  
SMX =57.2223

QUAD-4node, 2mm



SMN =47.9151  
SMX =57.431

# Energia odkształcenia sprężystego (SENE)

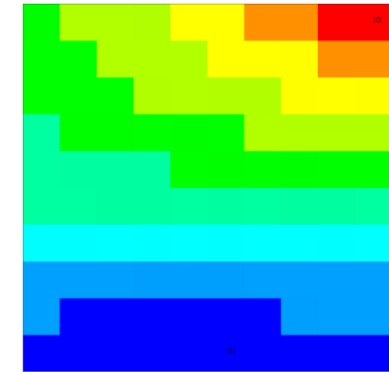
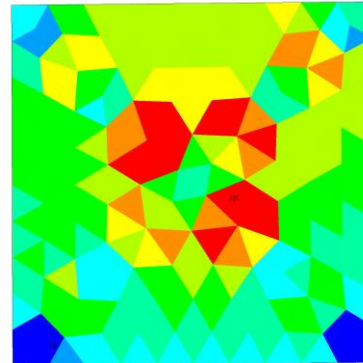
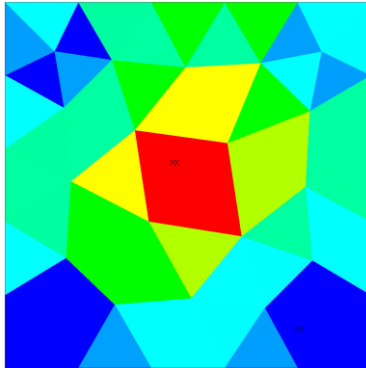
$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} [\varepsilon] \{\sigma\} d\Omega_e \quad (\text{Nmm})$$

CST, 4mm

CST, 2mm

QUAD-4node, 2mm

(SENE)

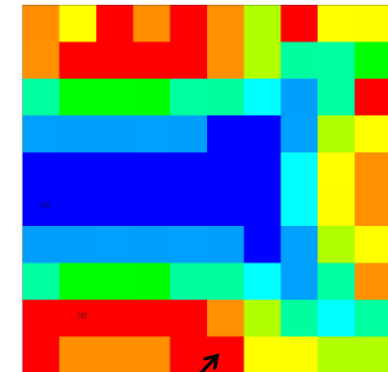
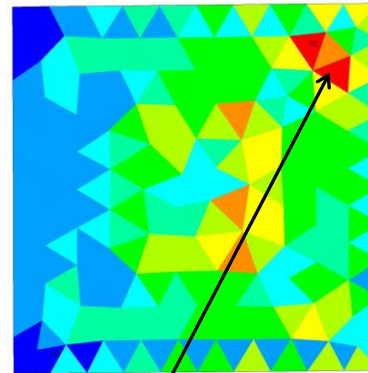
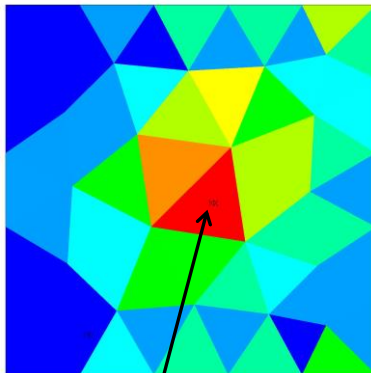


SMN = .029352  
SMX = .093964

SMN = .007026  
SMX = .019023

SMN = .024947  
SMX = .035708

Error  
(SERR)



SMN = .944E-05  
SMX = .155E-03  
(SEPC= 4.06%)

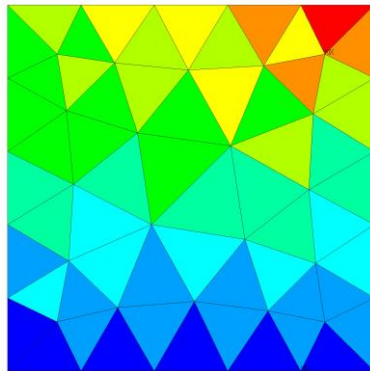
SMN = .434E-06  
SMX = .624E-05  
(SEPC= 1.92%)

SMN = .309E-07  
SMX = .945E-06  
(SEPC= 0.51%)

# Gęstość energii odkształcenia sprężystego (SENDELAS)

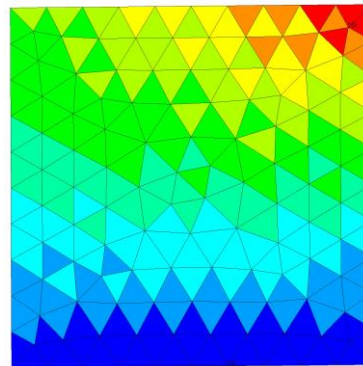
$$u_e = \frac{U_e}{\int_{\Omega_e} d\Omega_e}$$

CST, 4mm



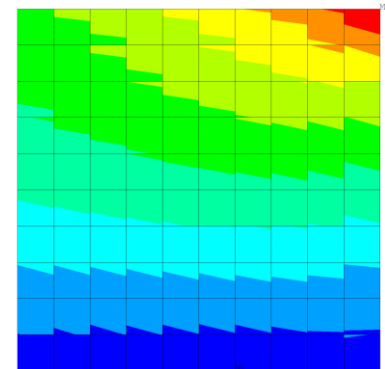
SMN = .005946  
SMX = .009429

CST, 2mm



SMN = .006126  
SMX = .009121

QUAD-4node, 2mm



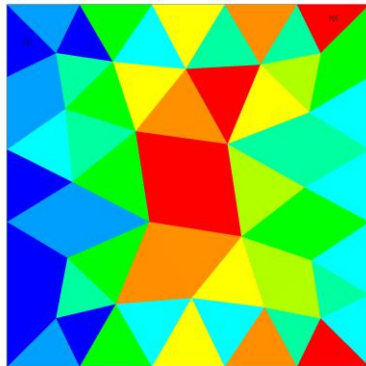
SMN = .006113  
SMX = .009243

(Nmm/mm<sup>3</sup>)



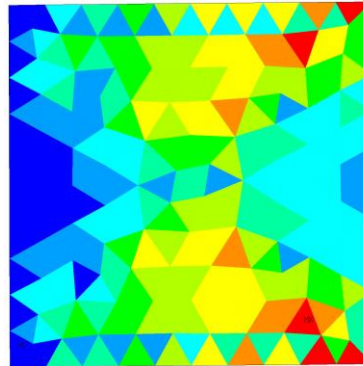
# Maksymalna wartość bezwzględna błędu składowych naprężenia (SDSG)

CST, 4mm



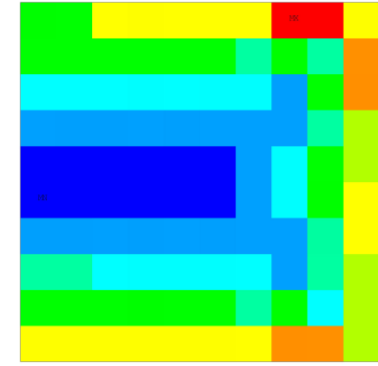
SMN =1.07305  
SMX =3.37362

CST, 2mm



SMN =.490022  
SMX =1.61018

QUAD-4node, 2mm



SMN =.045321  
SMX =.338378

(MPa)

**SDSG** -

$\Delta\sigma_i = \text{maximum absolute value of any component of}$

$$\{\Delta\sigma\}_n^i = \{\sigma\}_n^i - \{\sigma\}_n^{av}$$

for all nodes connected to the element